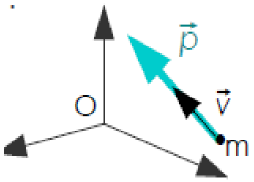
1 RAPPELS DE PHYSIQUES & MATHEMATIQUES

1.1 Notions de bases

1.1.1 Quantité de mouvement

:



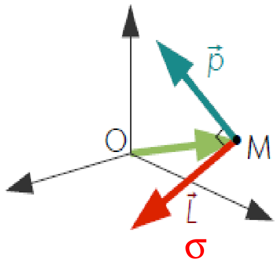
La quantité de mouvement d'un point de masse m animée d'une vitesse $\vec{v}$ est définie comme le produit de la masse et de la vitesse : $\boxed{\vec{p}=m.\vec{v}}$

La quantité

1.1.2 Moment cinétique

Le moment cinétique d'un point M de masse m et de vitesse $\vec{v}$ est défini par : $\boxed{\vec{\sigma}=\overline{OM}\wedge\vec{p}}$

Comme $\vec{p}=m.\vec{v}$ on obtient $\vec{\sigma}=\overline{OM}\wedge m\vec{v}$



Cas de la rotation

Pour un point M en rotation uniforme de vitesste angulaire ω autour d'un point O à une distance r de O, on peut utiliser les notations suivantes ::

- $\overline{OM}=\vec{r}$ d'ou $\vec{\sigma}_o=\vec{r}\wedge m\vec{v}$
- $\vec{k}$ est un vecteur unitaire, orthogonal à $\vec{r}$ et à $\vec{v}$ tel que le trièdre $(\vec{r},\vec{v},\vec{k})$ soit direct

  d'ou $\vec{\sigma}_o=m\,v\,r\,\vec{k}$
- $v=r.\omega$ d'ou $\vec{\sigma}_o=m\,r^2\,\omega\,\vec{k}$

On note $\boxed{I=mr^2}$ le moment d'inertie.

On obtient alors $\boxed{\vec{\sigma}_o=I_o\vec{\omega}}$

avec :

σ_o : moment cinétique

I_o : moment d'inertie

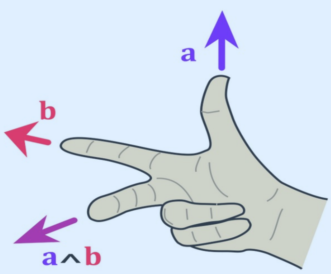
ω ; vitesse de rotation

Notion de produit vectoriel

Le produit vectoriel $\vec{a}\wedge\vec{b}$ est défini de manière unique par les propriété suivantes

1. le produit $\vec{a}\wedge\vec{b}$ est orhogonal à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$
2. $\|\vec{a}\wedge\vec{b}\|=\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\sin\theta$

   avec θ l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$
3. le trièdre $\{\vec{a},\vec{b},\vec{a}\wedge\vec{b}\}$ est direct.



La notion detrièdre direct est définie à l'aide, par exemple, de la règle des trois doigts de la main droite, pouce, index, majeur, comme illustré sur la figure

1.2 Principes de la dynamique

1.2.1 Principe fondamental de la dynamique

Dans un référentiel galiléen, la dérivée de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures qui s'exercent sur le solide

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}} \quad <=> \quad \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

1.2.2 Théoreme du moment cinétique

Pour un point en rotation par rapport à un point O considéré comme fixe, on a $\vec{\sigma}_o = \vec{r} \wedge \vec{p}$

La dérivation membre à membre de l'expression du moment angulaire, permet d'obtenir :

$$\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Comme $\frac{d\vec{r}}{dt}$ et $\vec{p} = m\vec{v}$ sont collinéaires, leur produit est nul, on obtient $\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$

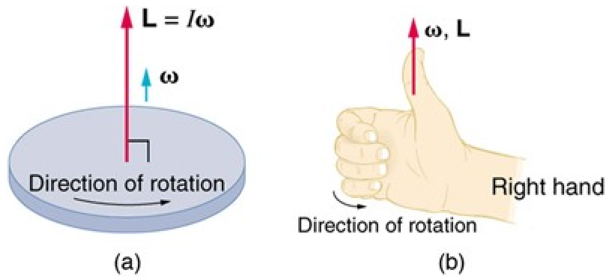
En reprenant le principe de fondamental de la dynamique, on obteint $\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = \vec{r} \wedge \sum \vec{F}_{ext/o}$ =>

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = \sum \vec{M}_o(\vec{F}_{ext})}$$

Remarque : Le moment d'une force par rapport à un point traduit en quelque sorte la "propension" de cette force à faire "tourner" le système autour de ce point

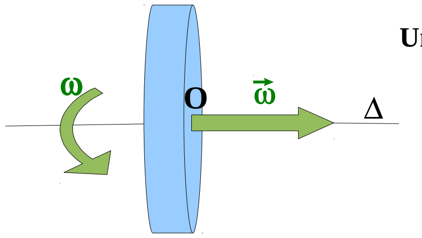
1.3 Application à un solide

L'ensemble des formules établies s'appliquent par sommation à tout solide.



2 LE GYROSCOPE

2.1 Définitions



Un gyroscope est un :

- solide possedant un axe de symétrie Δ
- fixé en un point O de cet exercice
- animé d'une grande vitessse angulaire ω

On note $\vec{\omega}$ *le vecteur de longeur* ω *porté par l'axe de rotation ; il représente la direction de cet axe à un instant donné.*

Moment cinétique du gyroscope : $\boxed{\vec{\sigma}_o = I_\Delta \vec{\omega}}$ (cf. rappels)

Un gyroscope libre est un gyroscope :

- suspendu par cardan,
- dont le centre de gravité est immobile

2.2 Principe de rigidité ou inertie gyroscopique

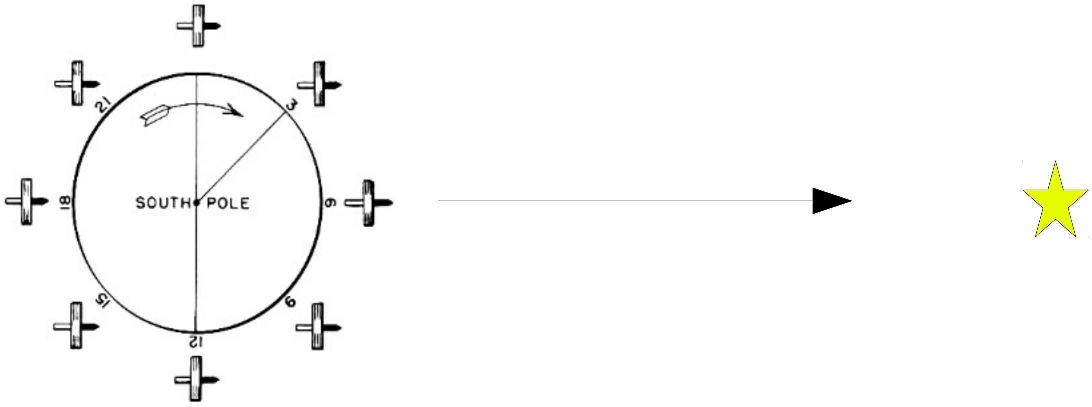
L'axe d'un gyroscope libre conserve une direction fixe dans l'espace stellaire (espace galiléen)

Justification *:*

Pour un gyroscope libre, le centre de gravité est immobile donc $\sum \overrightarrow{M_{\vec{F}_{ext/O}}} = \vec{0}$

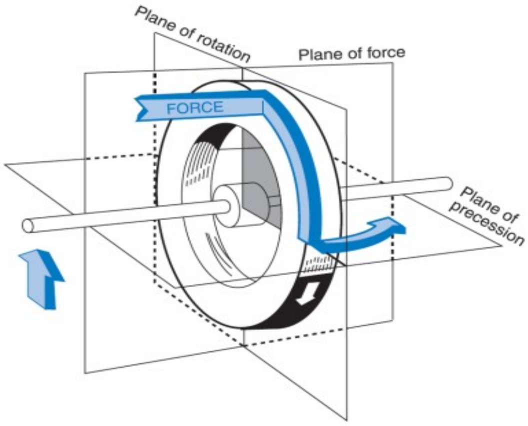
Or $\dfrac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = \sum \vec{M}_o(\vec{F}_{ext}) = \vec{0}$ $=>$ $\vec{\sigma}_o = \overrightarrow{Cte} = I_\Delta \vec{\omega}$ $=>$ $\vec{\omega} = \overrightarrow{Cte}$ $=>$ ***Δ fixe***

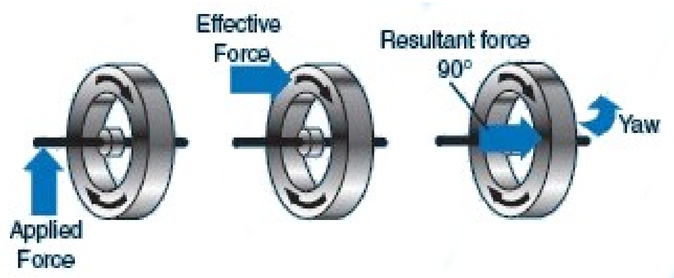
l'axe de rotation est constant (dans un repère Galiléen)



2.3 Application d'une force sur l'axe d'un gyroscope libre

Une force appliquée à l'axe d'un gyroscope écarte l'axe (Δ) perpendiculairement à la force.

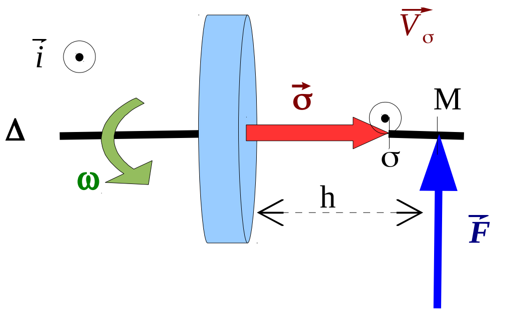




Justification

On applique une force F à une distance en un point M (OM=h)

On note σ *l'extrémité du vecteur* $\vec{\sigma}_o$.



$$\overrightarrow{M_{\vec{F}/0}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = h.F.\vec{i}$$

De 1.2.2 on a $\dfrac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = \sum \vec{M}_o(\vec{F}_{ext})$

$\dfrac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{O\sigma}}{dt} = \vec{V}_\sigma$ *et seul* $\vec{F}$ *s'applique*

On en déduit que donc $\vec{V}_\sigma = h.F.\vec{i}$ => $\vec{\sigma}_O$ ***se déplace selonune direction orthogonale à*** $\vec{F}$

2.4 La force de Coriolis

2.5 Précession gyroscopique

Moment

Si on applique un moment $\vec{M}_o$ à un gyroscope tournant à une vitesse $\vec{\omega}$, son axe Δ adopte un mouvement de précession de vitesse $\vec{\Omega}$ tel que a $\vec{M}_o = \vec{\Omega} \wedge I_\Delta \vec{\omega}$

Force de coriolis

L'axe d'un gyroscope libre placé à la surface de la Terre et auquel n'est appliqué aucune force extérieure décrit par rapport à la Terre un cône identque à celui que décrirait par rapport à des axes absolus un gyroscope soumis à une force $\vec{U}$:

- dirigée // à l'axe des pôles
- de norme égale à la vitesse de rotation de la terrestre

<u>L'effet gyroscopique</u>

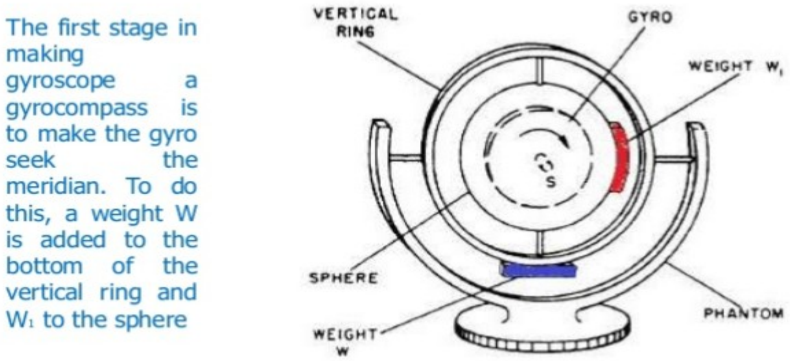
Si on communique à un gyroscope tournant à grande vitesse un mouvement de précesssion, l'axe du gyroscope est soumis à un couple de forces de moement $\overrightarrow{M_{gyr}}$ qui tend à amner l'axe du gyro parallélement à l'axe de précession

3 LE GYROCOMPAS

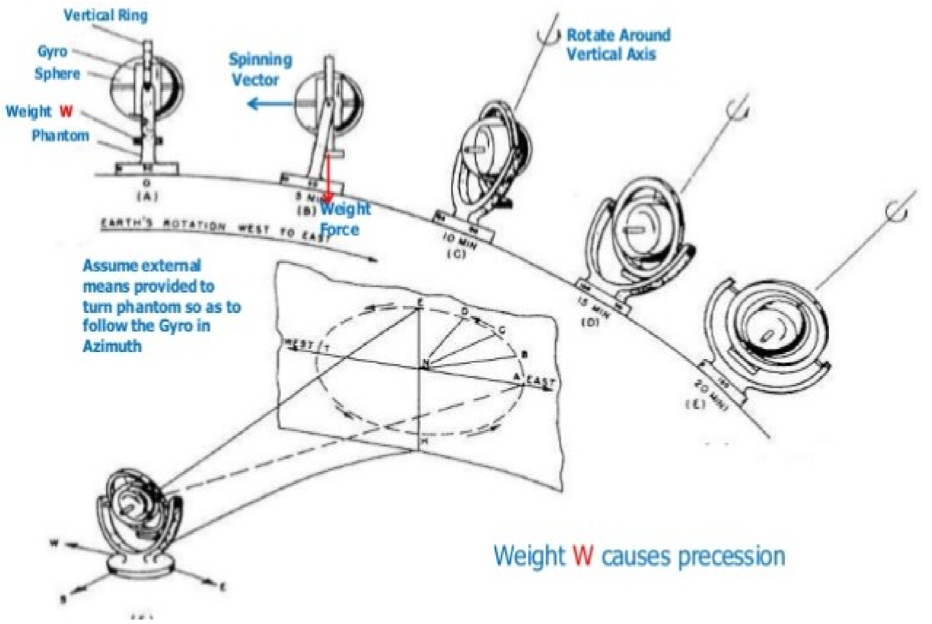
L'objectif du gyrocompas est d'indiquer en permanence le Nord vrai dans le plan horizontal.
=> amener et fixer l'axe du gyroscope dans cette position

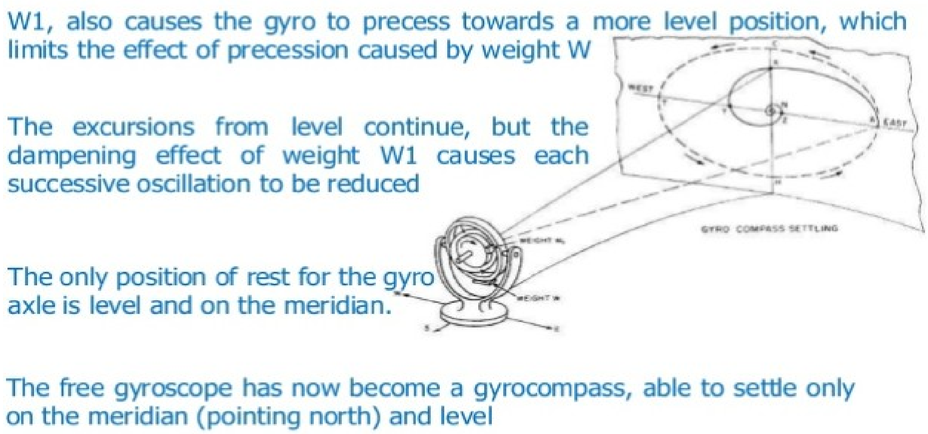
3.1 Principe

Un gyrocompas est un gyroscope libre sur lequel on attache un poids comme à la figure suivante .



Le poids placé en bas tend à maintenir l''axe du gyroscope perpendiculaire à la direction de la pesanteur. Quand la Terre tourne, ce poids va être soulevé par le gyroscope qui veut rester aligner et il va vouloir redescendre. Cela crée un couple parallèle à la rotation de la Terre autour duquel le gyroscope va précesser.

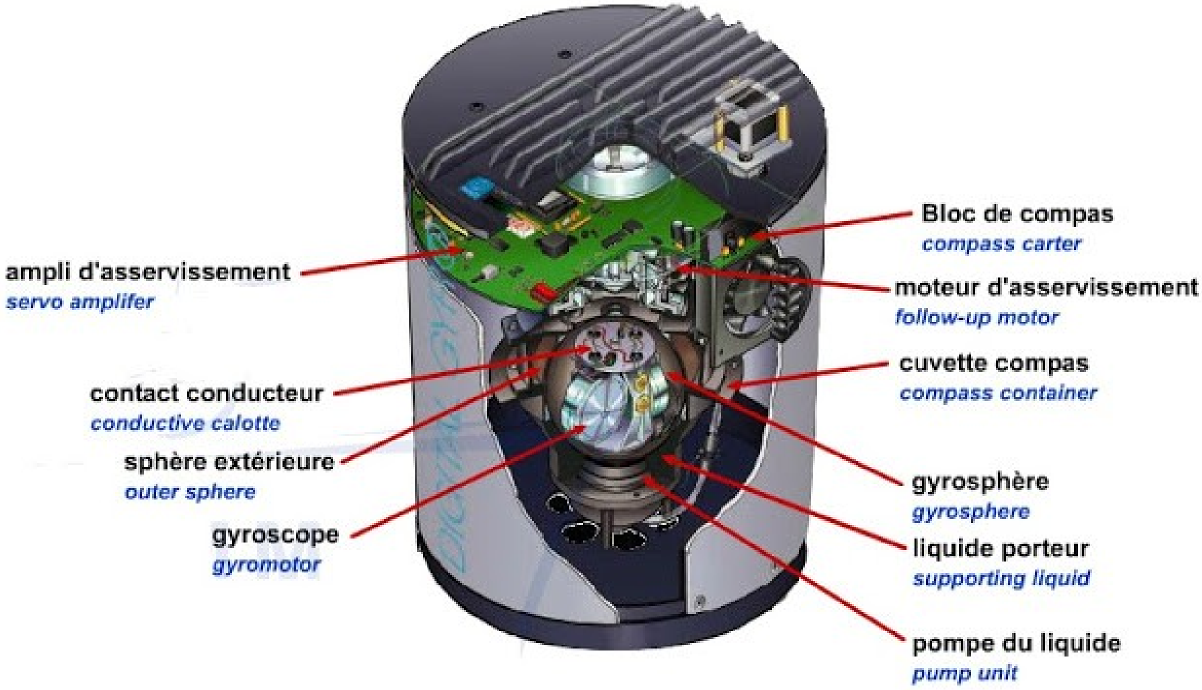




3.2 Déviation du gyrocompas

$$d° \approx \frac{-V \times \cos c_v}{15 \times \cos \varphi}$$

3.3 Exemple d'un le gyrcompas



Bloc de compas
compass carter
ampli d'asservissement
servo amplifer
moteur d'asservissement
follow-up motor
cuvette compas
compass container
contact conducteur
conductive calotte
sphère extérieure
outer sphere
gyrosphère
gyrosphere
gyroscope
gyromotor
liquide porteur
supporting liquid
pompe du liquide
pump unit

4 LES DIFFÉRENTS GYROCOMPAS