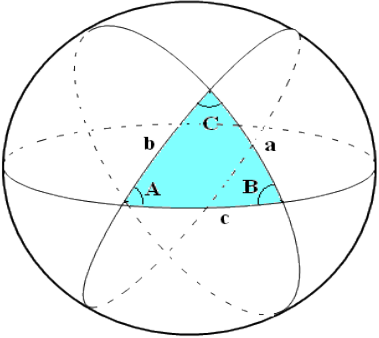


RAPPELS DE TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE

Rappels de trigonométrie sphérique

 <p style="text-align: center;"><i>Illustration 1: Triangle sphérique</i></p>	$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \quad (1)$ $\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a \quad (2)$ $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \quad (3)$ $\sin(90 - x) = \cos x \quad (4)$ $\cos(90 - x) = \sin x \quad (5)$ $\cos b \cdot \cos C = \frac{\sin C}{\tan A} - \frac{\sin b}{\tan a} \quad (6)$
--	--

Le pentagone de Néper

Si dans le triangle sphérique un des angles est droit, les formules de trigonométrie se simplifient et aboutissent à une formulation qui peut être résumée ainsi.

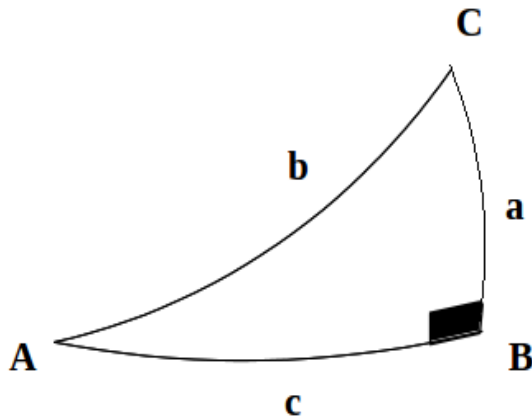


Illustration 2: Triangle sphérique avec angle droit

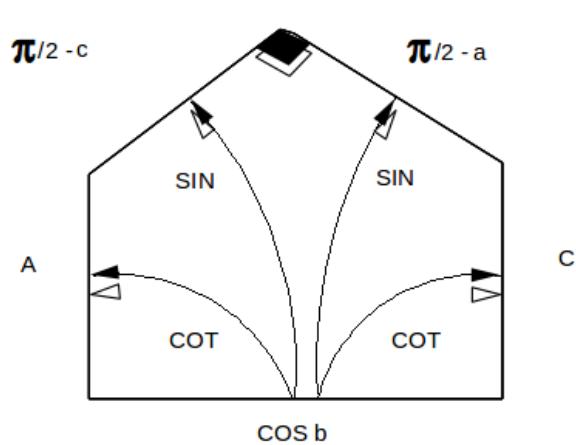


Illustration 3 : Pentagone de Néper

Le cosinus d'un des paramètres est égal au produit des sinus des côtés faces et au produit des cotangentes latérales à ce paramètre. Il faut remarquer que ceci est vrai quel que soit le paramètre

Par exemple :

$$\cos b = \cotan A \cdot \cotan C$$

$$\cos b = \sin\left(\frac{\pi}{2} - c\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$$

DÉMONSTRATION DES FORMULES DE L'ORTHODROMIE

La distance orthodromique

On applique la 1ere formule de trigo sphérique au triangle PDA

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

$$\cos d = \cos(90 - \phi_D) \cdot \cos(90 - \phi_A) + \sin(90 - \phi_D) \cdot \sin(90 - \phi_D) \cdot \cos g$$

$$\cos d = \sin \phi_D \cdot \sin \phi_A + \cos \phi_D \cdot \cos \phi_D \cdot \cos g$$

L'angle de route Ad

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

$$g = G_A - G_D$$

$$\sin \phi_A = \sin \phi_D \cdot \cos d + \cos \phi_D \cdot \sin d \cdot \cos Ad$$

Latitude et longitude du vertex

On applique le pentagone de Néper sur le triangle sphérique PDV

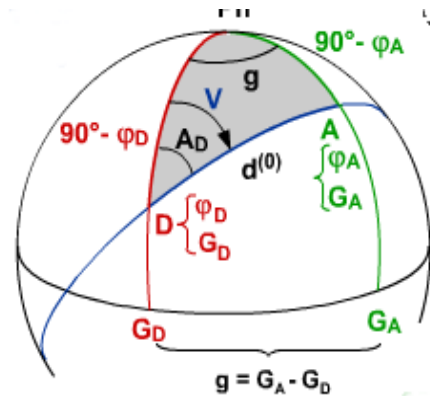


Illustration 4 : Triangle de position

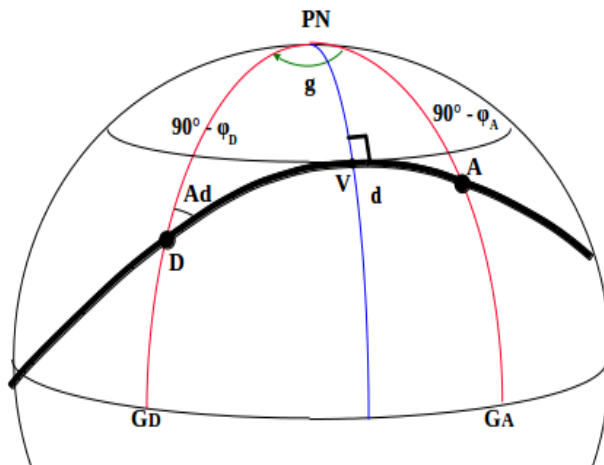


Illustration 5 : Triangle de position et vertex

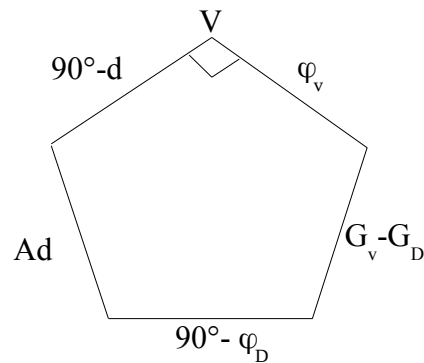


Illustration 6 : Néper et vertex

Latitude du vertex

$$\cos \phi_v = \sin Ad \sin(90 - \phi_D) \Rightarrow \cos \phi_v = \sin Ad \cdot \cos \phi_D \quad \text{si } Ad < 90^\circ \text{ } \phi_v \text{ est N; si } Ad > 90^\circ \text{ } \phi_v \text{ est S}$$

$$\Rightarrow |\phi_v| = \arccos(\sin Ad \cdot \cos \phi_D)$$

Longitude du vertex

$$\cos(G_v - G_D) = \cotan \phi_v \cdot \cotan(90 - \phi_D) = \frac{\cotan(90 - \phi_D)}{\tan \phi_v}$$

Or $\cotan(90 - x) = \tan x$

$$\cos(G_v - G_D) = \frac{\tan \phi_D}{\tan \phi_v} \Leftrightarrow |G_v - G_D| = \arccos\left(\frac{\tan \phi_D}{\tan \phi_v}\right) \Rightarrow G_v = G_D + \frac{g}{|g|} \arccos\left(\frac{\tan \phi_D}{\tan \phi_v}\right)$$

Le parcours mixte

Dans un parcours mixte, on ne veut pas dépasser une certaine latitude maximale (pour éviter les dangers dus aux glaces ou perte de la couverture Inmarsat par exemple)

On a donc le schéma $\phi_{V1} = \phi_{V2} = \phi_{max}$ ou les point V_1 et V_2 délimite la route orthodromique de la route loxodromique conformément au graphique ci après.

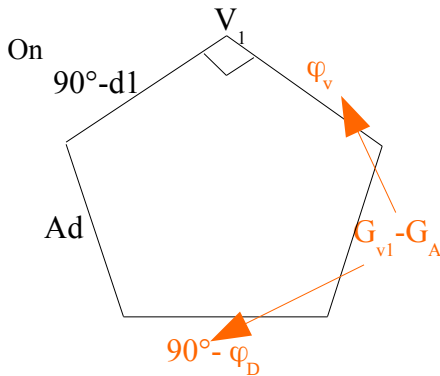


Illustration 8 : Nèper & longitude

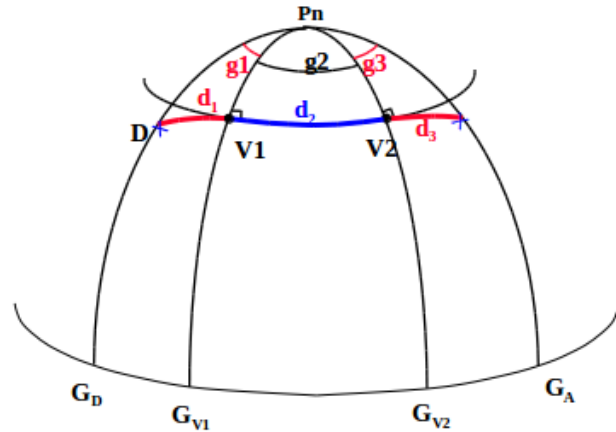


Illustration 7 : Triangles de position et route mixte

On prend le triangle $D \hat{P}_n V_1$

De même que précédemment pour le vert, on obtient la longitude du point V_1

$$\cos(G_{V1} - G_D) = \cotan \phi_{V1} \cdot \cotan(90 - \phi_D) = \frac{\cotan(90^\circ - \phi_D)}{\tan \phi_{V1}} = \frac{\tan \phi_D}{\tan \phi_{V1}}$$

On obtient ainsi la longitude du point V_1 . On ferait de même dans le triangle $DP_n V_2$ pour obtenir la longitude du point V_2 .

D'où

$$|G_{V1} - G_D| = \arccos\left(\frac{\tan \phi_D}{\tan \phi_{V1}}\right)$$

D'où

$$\boxed{G_{V1} = G_D + \arccos\left(\frac{\tan \phi_D}{\tan \phi_{V1}}\right)} \quad \boxed{G_{V2} = G_A - \arccos\left(\frac{\tan \phi_A}{\tan \phi_{V2}}\right)}$$

ENSM Le Havre	CALCUL ORTHODROMIQUE	V1.3 – 12/17
<i>A. Charbonnel</i>	<i>ORTHODROMIE & TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE</i>	4/4

SOURCES

Illustrations

ILLUSTRATION	SOURCES
Illustration 1: Triangle sphérique	Wikimedia – triangle sphérique https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Triangle_sph%C3%A9rique.svg
Illustration 2: Triangle sphérique avec angle droit	R. Talon – <i>Les méthodes de l'astrophysique</i> – figure 32 et 33, page 24 - 2001 - polycopié Université Paul Sabatier / deugSM U03 – astrophysique consulté le 15/10/16 sur webast.ast.obs-mip.fr/users/ablancha/fac/03/SMA10/COUDEUG.doc
Illustration 3 : Pentagone de Néper	
Illustration 4 : Triangle de position	Baudu & Hayot – <i>Diaporama Orthodromie</i> – 2006 - ENMM Marseille consulté en ligne le 01/11/2016 http://dept.navigation.enmm.free.fr/orthodromie.swf
Illustration 5: Triangle de position et vertex	H. Martin – <i>Diaporama Orthodromie</i> – 2016 - ENSM
Illustration 7 : Triangles de position et route mixte	H. Martin – <i>Diaporama Orthodromie</i> – 2016 - ENSM
Illustration 8 : Néper & longitude	A. Charbonnel – figure libre de droit

