Cette fiche a pour objectif de faire la synthèse des erreurs et points abordés vus lors de la séance de TD.

RAPPELS DE TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE

Rappels de trigonométrie sphérique

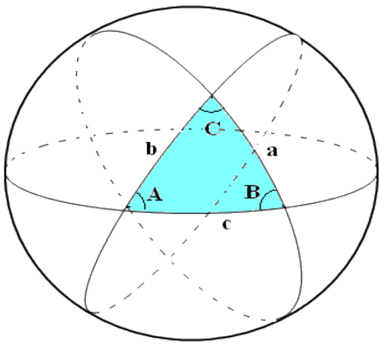

Illustration 1: Triangle sphérique

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \quad (1)$$

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a \quad (2)$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \quad (3)$$

$$\sin(90 - x) = \cos x \quad (4)$$

$$\cos(90 - x) = \sin x \quad (5)$$

$$\cos b \cdot \cos C = \frac{\sin C}{\tan A} - \frac{\sin b}{\tan a} \quad (6)$$

Le pentagone de Neper

Si dans le triangle sphérique un des angles est droit, les formules de trigonométrie se simplifient et aboutissent à une formulation qui peut être résumée ainsi.

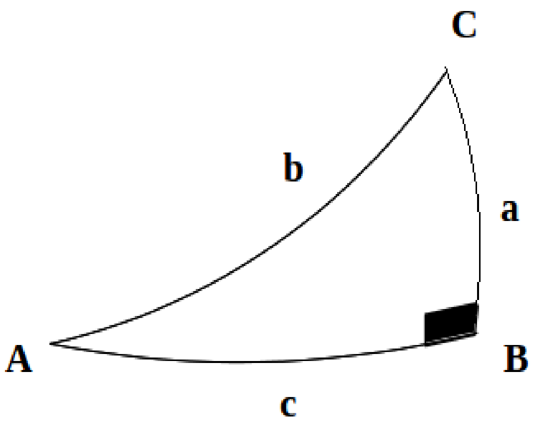

Illustration 2: Triangle sphérique avec angle droit

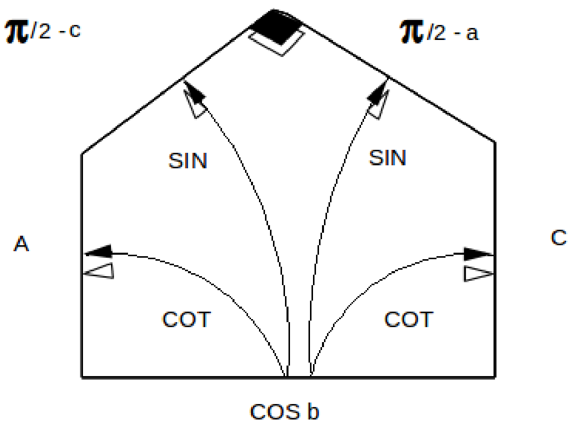

Illustration 3 : Pentagone de Neper

Le cosinus d'un des paramètres est égal au produit des sinus des côtés faces et au produit des cotangentes latérales à ce paramètre. Il faut remarquer que ceci est vrai <u>quel</u> <u>que</u> <u>soit</u> <u>le</u> <u>paramètre</u>

<u>Par</u> <u>exemple</u> <u>:</u>

$$\cos b = cotan\, A \,.\, cotan\, C$$
$$\cos b = \sin\left(\frac{\pi}{2} - c\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$$

LES ERREURS DANS LES CALCULS D'ORTHODROMIE

a) Signes des angles dans touts calculs

latitude NORD + longitude OUEST : +
latitude SUD : - Longitude EST ;

REVERIFIER les signes dans vos calculs
FAIRE un croquis des positions par rapport à l'équateur/méridien de greenwich ou antemeridien
=> visualiser les position N/S W/E

b) Différence de longitude : partir dans le bon sens (le plus court

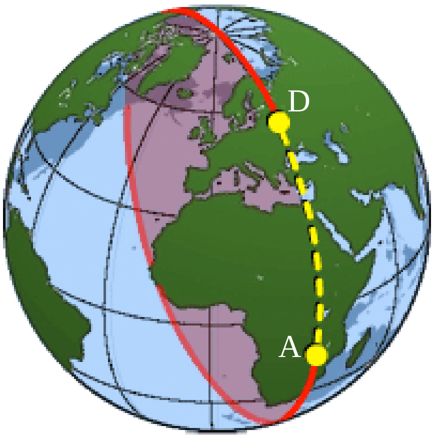

Illustration 4 : Trajets orthodromiques AB

Pour aller de D à A, on peut soit prendre le trajet jaune trait plein, soit le rouge (trait discontinu).
L'orthodromie en navigation, c'est l**e chemin le plus court** entre deux points.
Si on applique bêtement les formules ($g = G_A - G_D$) on peut se retrouver à prendre le chemin le plus long (en trait plein) entre D et A au lieu de prendre le plus court (en trait discontinu) ; ce « problème » peut se rencontrer quand l'on se trouve autour du méridien de Greenwich ou de l'antiméridien

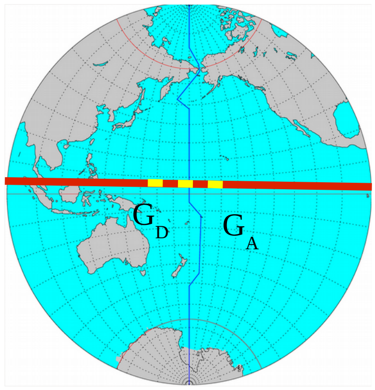

Illustration 5 : Différences de longitudes

Par exemple :
si G_D = 150°E, G_A= 150°W,
Si on applique bêtement la formule $g = G_A - G_D$, on obtient g= 300° (trajet rouge sur , alors que la différence de longitude entre A et D est de 60° (le complément à 360°)

c) Utilisation des formules d'orthodromie

Préferer retenir les formule sous la forme cos ou tan que arcos ou actan

cos(x)= cos(-x) Donc $\boxed{\cos\phi_v = \sin Ad \cdot \cos\phi_D}$ ne donne pas le signe de φ_v

d) Faire attention aux condtions toujours sur les signes

$\boxed{\cos\phi_v = \sin Ad \cdot \cos\phi_D}$ or $\cos\phi_v = \cos(-\phi_v)$

donc **le passage par cos^{-1} t (arcos) ne permet d'avoir le signe de φ_v**
les conditions sont :

- **Si Ad<90°,φv est Nord**
- **Si Ad > 90, φv est Sud**

d) conclusion

1. **Faire un croquis pour visualiser les point s de départs et arrivés par rapport à l'équateur et au méridien de Greenwich ou antéméridien**
2. **Retenir et visualiser les conditions sous lesquelles les latitutdes sont N/S et les longitudes E/W**

DÉMONSTRATION DES FORMULES DE L'ORTHODROMIE

La distance orthodromique

On applique la 1ere formule de trigo sphérique au triangle PDA

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

$$\cos d = \cos(90 - \phi_D) \cdot \cos(90 - \phi_A) + \sin(90 - \phi_D) \cdot \sin(90 - \phi_D) \cdot \cos g$$

$$\boxed{\cos d = \sin \phi_D \cdot \sin \phi_A + \cos \phi_D \cdot \cos \phi_D \cdot \cos g}$$

L'angle de route Ad

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

$g = G_A - G_D$

$$\sin \phi_A = \sin \phi_D \cdot \cos d + \cos \phi_D \cdot \sin d \cdot \cos Ad$$

$$\boxed{\cos Ad = \frac{\sin \phi_A - \sin \phi_D \cdot \cos d}{\cos \phi_D \cdot \sin d}}$$

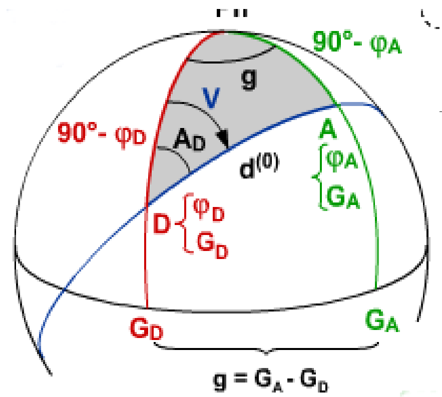

Illustration 6 : Triangle de positon

Latitude et longitude du vertex

On applique le pentagone de Neper sur le triangle sphérique PDV

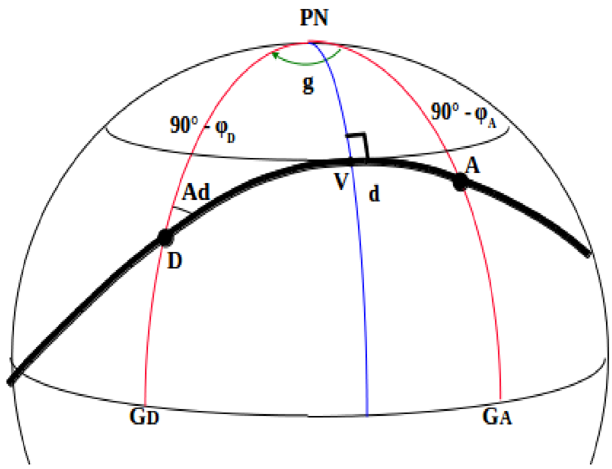

Illustration 7: Triangle de position et vertex

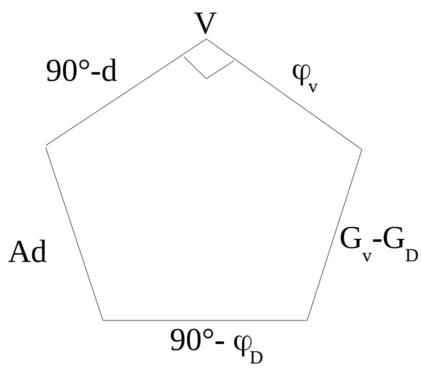

Illustration 8 : Neper et vertex

Latitude du vertex

$\cos \phi_v = \sin Ad \sin(90 - \phi_D)$ => $\boxed{\cos \phi_v = \sin Ad \cdot \cos \phi_D}$ si Ad < 90° φ_v est N; si Ad >90° φ_v est S

Longitude du vertex

$$\cos(G_V - G_D) = cotan \phi_v \cdot cotan(90 - \phi_D) = \frac{cotan(90° - \phi_D)}{\tan \phi_v}$$

Or $cotan(90 - x) = \tan x$

$$\boxed{\cos(G_V - G_D) = \frac{\tan \phi_D}{\tan \phi_v}}$$

Le parcours mixte

Dans un parcours mixte, on ne veut pas dépasser une certaine latitude maximale (pour éviter les dangers dus aux glaces ou perte de la couverture Inmarsat par exemple

On a donc le schéma $\phi_{V1}=\phi_{v2}=\phi_{max}$ ou les point V_1 et V_2 délimite la route orthodromique de la route loxodromique conformément au graphique ci après.

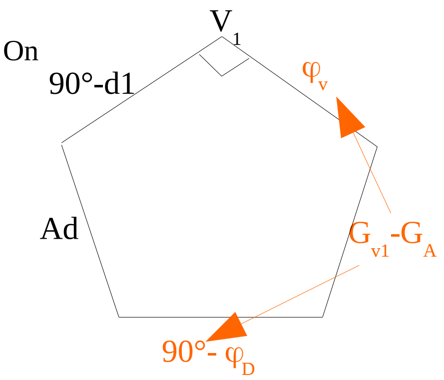

Illustration 10 : Neper & longitude

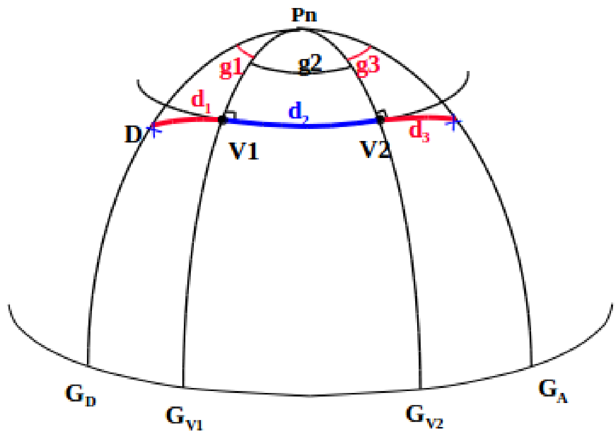

Illustration 9 : Triangles de position et route mixte

On prend le triangle $D\hat{P}_n V_1$

De même que précédemment pour le verte, on obtient la longitude du point V_1

$$\cos(G_{V1}-G_A)=cotan\,\phi_{v1}\cdot cotan(90-\phi_A)=\frac{cotan(90°-\phi_A)}{\tan\phi_{v1}}=\frac{\tan\phi_A}{\tan\phi_{v1}}$$

On obtient ainsi la longitude du point V_1. On ferrait de même dans le triangle DP_nV_2 pour obtenir la longitude du point V_2.

SOURCES

Illustrations

ILLUSTRATION	SOURCES
Illustration 1: Triangle sphérique	Wikimedia – triangle sphérique https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Triangle_sph%C3%A9rique.svg
Illustration 2: Triangle sphérique avec angle droit	R. Talon – *Les méthodes de l'astrophysique* – figure 32 et 33, page 24 - 2001 - polycopié Université Paul Sabatier / deugSM U03 – astrophysique consulté le 15/10/16 sur *webast.ast.obs-mip.fr/users/ablancha/fac/03/SMA10/COUDEUG.doc*
11Illustration 3 : Pentagone de Neper	
Illustration 4 : Trajets orthodromiques AB	d'après image consultée le 04/11/2016 : https://earthquake.usgs.gov/learn/glossary/images/greatcircle_thumb.gif
Illustration 5 : Différences de longitudes	d'après iage consultée le 04/11/2016 https://earthquake.usgs.gov/learn/glossary/images/greatcircle_thumb.gif
Illustration 6 : Triangle de positon	Baudu & Hayot – *Diaporama Orthodromie* – 2006 - ENMM Marseille consulté en ligne le 01/11/2016- *http://dept.navigation.enmm.free.fr/orthodromie.swf*
Illustration 7: Triangle de position et vertex	H. Martin – *Diaporama Orthodromie* – 2016 - ENSM
Erreur : source de la référence non trouvée	A. Charbonnel – libre de droit
Illustration 9 : Triangles de position et route mixte	H. Martin – *Diaporama Orthodromie* – 2016 - ENSM
Illustration 10 : Neper & longitude	A. Charbonnel – figure libre de droit