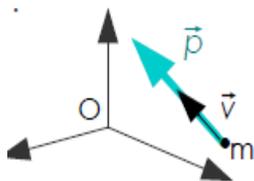


## 1 RAPPELS DE PHYSIQUES & MATHÉMATIQUES

### 1.1 Notions de bases

#### 1.1.1 Quantité de mouvement



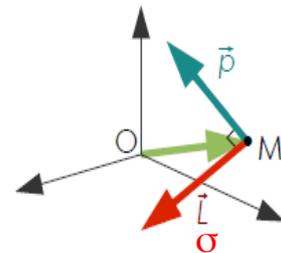
La quantité de mouvement d'un point de masse  $m$  animée d'une vitesse  $\vec{v}$  est définie comme le produit de la masse et de la vitesse :  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

#### 1.1.2 Moment cinétique

Le moment cinétique d'un point  $M$  de masse  $m$  et de vitesse

$\vec{v}$  est défini par :  $\vec{\sigma} = \overline{OM} \wedge \vec{p}$

Comme  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$  on obtient  $\vec{\sigma} = \overline{OM} \wedge m \vec{v}$



#### Cas de la rotation

Pour un point  $M$  en rotation uniforme de vitesse angulaire  $\omega$  autour d'un point  $O$  à une distance  $r$  de  $O$ , on peut utiliser les notations suivantes ::

- $\overline{OM} = \vec{r}$  d'ou  $\vec{\sigma}_o = \vec{r} \wedge m \vec{v}$
- $\vec{k}$  est un vecteur unitaire, orthogonal à  $\vec{r}$  et à  $\vec{v}$  tel que le trièdre  $(\vec{r}, \vec{v}, \vec{k})$  soit direct d'ou  $\vec{\sigma}_o = m v r \vec{k}$
- $v = r \cdot \omega$  d'ou  $\vec{\sigma}_o = m r^2 \omega \vec{k}$

On note  $I = m r^2$  le moment d'inertie.

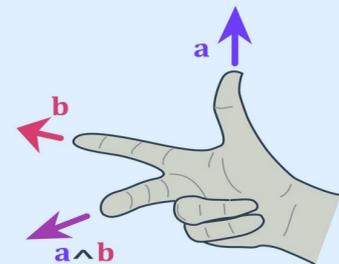
On obtient alors  $\vec{\sigma}_o = I_o \vec{\omega}$  avec :

- $\sigma_o$  : moment cinétique
- $I_o$  : moment d'inertie
- $\omega$  ; vitesse de rotation

#### Notion de produit vectoriel

Le produit vectoriel  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  est défini de manière unique par les propriétés suivantes

1. le produit  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  est orthogonal à  $\vec{a}$  et à  $\vec{b}$
2.  $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \theta$   
avec  $\theta$  l'angle entre  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$
3. le trièdre  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b}\}$  est direct.



La notion de trièdre direct est définie à l'aide, par exemple, de la règle des trois doigts de la main droite, pouce, index, majeur, comme illustré sur la figure

A. Charbonnel	<b>GYROCOMPAS</b>	V1.1–02/24
NAV/THD	<b>ÉLÉMENTS SUR LE GYROSCOPE ET LE GYROCOMPAS</b>	2/8

## 1.2 Principes de la dynamique

---

### 1.2.1 Principe fondamental de la dynamique

Dans un référentiel galiléen, la dérivée de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures qui s'exercent sur le solide

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}} \Leftrightarrow \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

### 1.2.2 Théorème du moment cinétique

Pour un point en rotation par rapport à un point O considéré comme fixe, on a  $\vec{\sigma}_o = \vec{r} \wedge \vec{p}$   
 La dérivation membre à membre de l'expression du moment angulaire, permet d'obtenir :

$$\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Comme  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  et  $\vec{p} = m\vec{v}$  sont collinéaires, leur produit est nul, on obtient  $\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$

En reprenant le principe de fondamental de la dynamique, on obtient  $\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = \vec{r} \wedge \sum \vec{F}_{ext/o} \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = \sum \vec{M}_o(\vec{F}_{ext})}$$

**Remarque :** Le moment d'une force par rapport à un point traduit en quelque sorte la "propension" de cette force à faire "tourner" le système autour de ce point

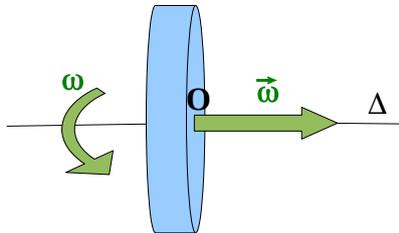
### 1.3 Application à un solide

---

L'ensemble des formules établies s'appliquent par sommation à tout solide.

## 2 LE GYROSCOPE

### 2.1 Définitions



Un gyroscope est un :

- solide possédant un axe de symétrie  $\Delta$
- fixé en un point O de cet exercice
- animé d'une grande vitesse angulaire  $\omega$

On note  $\vec{\omega}$  le vecteur de longueur  $\omega$  porté par l'axe de rotation ; il représente la direction de cet axe à un instant donné.

Moment cinétique du gyroscope :  $\vec{\sigma}_o = I_{\Delta} \vec{\omega}$  (cf. rappels)

Un gyroscope libre est un gyroscope :

- suspendu par cardan,
- dont le centre de gravité est immobile

### 2.2 Principe de rigidité ou inertie gyroscopique

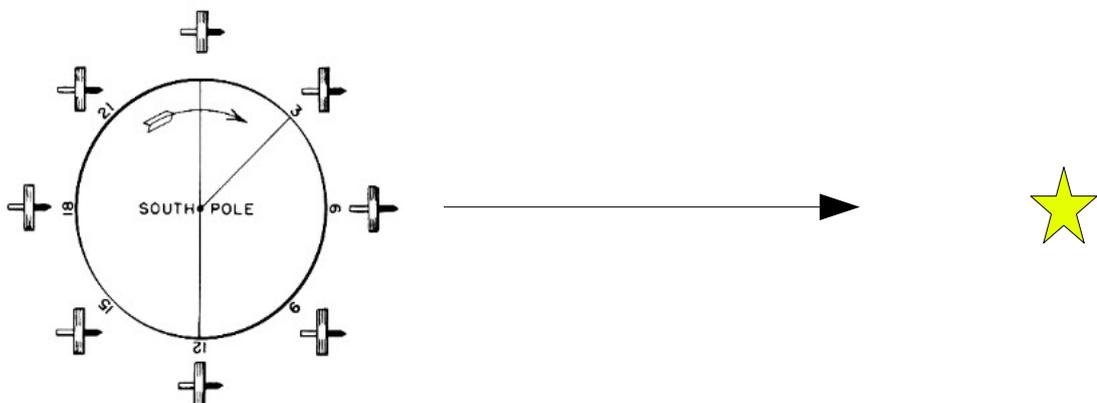
L'axe d'un gyroscope libre conserve une direction fixe dans l'espace stellaire (espace galiléen)

**Justification :**

Pour un gyroscope libre, le centre de gravité est immobile donc  $\sum \vec{M}_{F_{ext/O}} = \vec{0}$

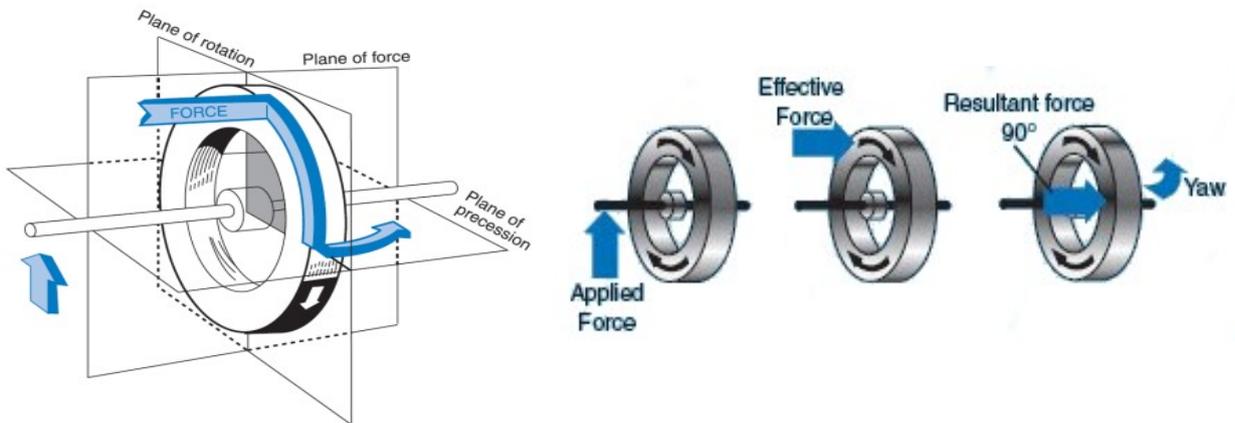
Or  $\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = \sum \vec{M}_o(\vec{F}_{ext}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{\sigma}_o = \overline{Cte} = I_{\Delta} \vec{\omega} \Rightarrow \vec{\omega} = \overline{Cte} \Rightarrow \Delta \text{ fixe}$

*L'axe de rotation est constant (dans un repère Galiléen)*



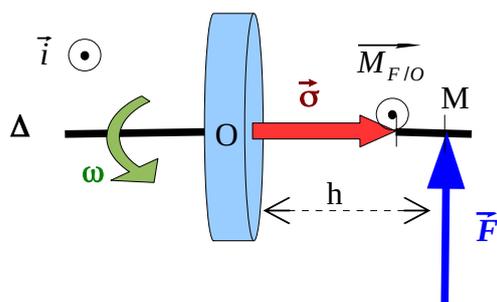
### 2.3 Application d'une force sur l'axe d'un gyroscope libre

Une force appliquée à l'axe d'un gyroscope écarte l'axe ( $\Delta$ ) perpendiculairement à la force.



#### Justification

On applique une force  $\vec{F}$  à une distance en un point M ( $OM=h$ )

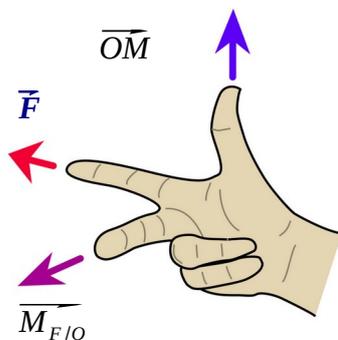


$$\vec{M}_{\vec{F}/O} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = h \cdot F \cdot \vec{i}$$

De 1.2.2 on a  $\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = \sum \vec{M}_o(\vec{F}_{ext})$

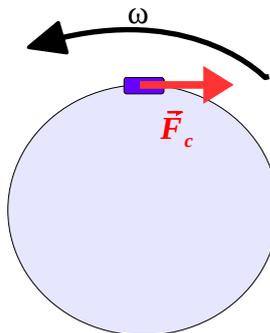
$$\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = \frac{d\vec{O}\vec{\sigma}}{dt} = \vec{V}_\sigma \text{ et seul } \vec{F} \text{ s'applique}$$

On en déduit que donc  $\vec{V}_\sigma = h \cdot F \cdot \vec{i} \Rightarrow \vec{\sigma}_o$  se déplace selon une direction orthogonale à  $\vec{F}$



A. Charbonnel	<b>GYROCOMPAS</b>	V1.1– 02/24
NAV/THD	<i>ÉLÉMENTS SUR LE GYROSCOPE ET LE GYROCOMPAS</i>	5/8

## 2.4 La force de Coriolis



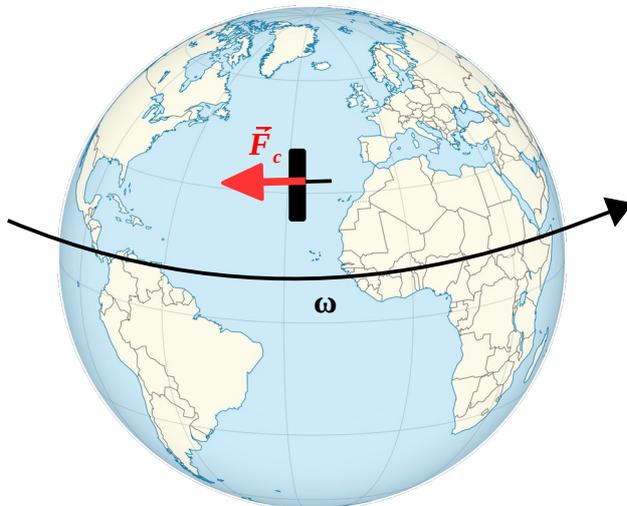
### Principe

La force de Coriolis est une force inertielle qui agit sur des objets en mouvement dans référentiel en rotation. C'est une force fictive qui permet d'expliquer l

Par exemple si le système de référence est en rotation dans le sens des aiguilles d'une montre, la force de Coriolis agira dans la direction opposée au mouvement de rotation du système de référence.

### Application gyroscope

La Terre tourne d'ouest en est. Un gyroscope libre subira donc une force de Coriolis dirigée vers l'ouest



## 2.5 Précession gyroscopique

### Moment

Si on applique un moment  $\vec{M}_o$  à un gyroscope tournant à une vitesse  $\vec{\omega}$ , son axe  $\Delta$  adopte un mouvement de précession de vitesse  $\vec{\Omega}$  tel que a  $\vec{M}_o = \vec{\Omega} \wedge I_{\Delta} \vec{\omega}$

### Force de coriolis

L'axe d'un gyroscope libre placé à la surface de la Terre et auquel n'est appliqué aucune force extérieure décrit par rapport à la Terre un cône identique à celui que décrirait par rapport à des axes absolus un gyroscope soumis à une force  $\vec{U}$  :

- dirigée // à l'axe des pôles
- de norme égale à la vitesse de rotation de la terrestre

### L'effet gyroscopique

Si on communique à un gyroscope tournant à grande vitesse un mouvement de précession, l'axe du gyroscope est soumis à un couple de forces de moment  $\vec{M}_{gyr}$  qui tend à amener l'axe du gyro parallèlement à l'axe de précession

A. Charbonnel	<b>GYROCOMPAS</b>	V1.1-02/24
NAV/THD	<i>ÉLÉMENTS SUR LE GYROSCOPE ET LE GYROCOMPAS</i>	6/8

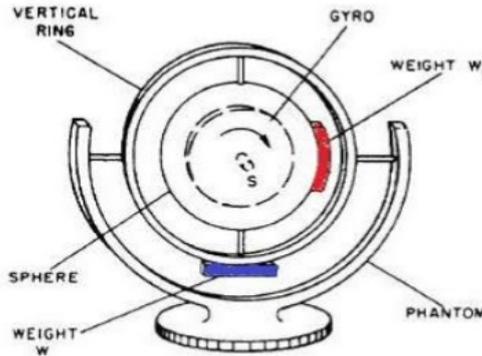
### 3 LE GYROCOMPAS

L'objectif du gyrocompas est d'indiquer en permanence le Nord vrai dans le plan horizontal.  
=> amener et fixer l'axe du gyroscope dans cette position

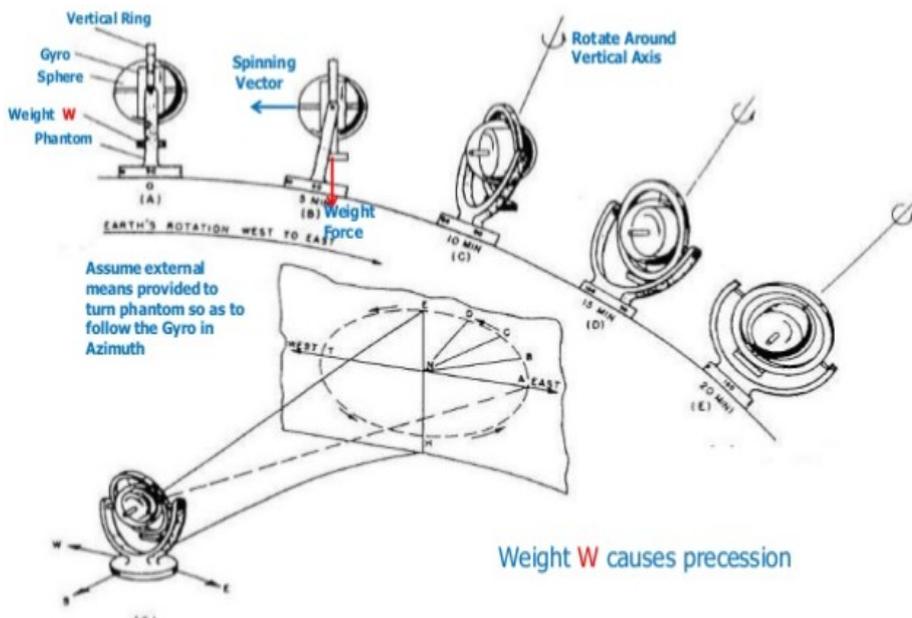
#### 3.1 Principe

Un gyrocompas est un gyroscope libre sur lequel on attache un poids comme à la figure suivante .

The first stage in making a gyrocompass is to make the gyro seek the meridian. To do this, a weight  $W$  is added to the bottom of the vertical ring and  $W_1$  to the sphere



Le poids placé en bas tend à maintenir l'axe du gyroscope perpendiculaire à la direction de la pesanteur. Quand la Terre tourne, ce poids va être soulevé par le gyroscope qui veut rester aligner et il va vouloir redescendre. Cela crée un couple parallèle à la rotation de la Terre autour duquel le gyroscope va précessionner.

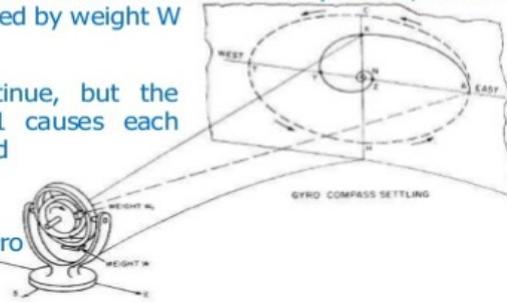


A. Charbonnel NAV/THD	<b>GYROCOMPAS</b> ÉLÉMENTS SUR LE GYROSCOPE ET LE GYROCOMPAS	V1.1- 02/24 7/8
--------------------------	---	--------------------

W1, also causes the gyro to precess towards a more level position, which limits the effect of precession caused by weight W

The excursions from level continue, but the dampening effect of weight W1 causes each successive oscillation to be reduced

The only position of rest for the gyro axle is level and on the meridian.

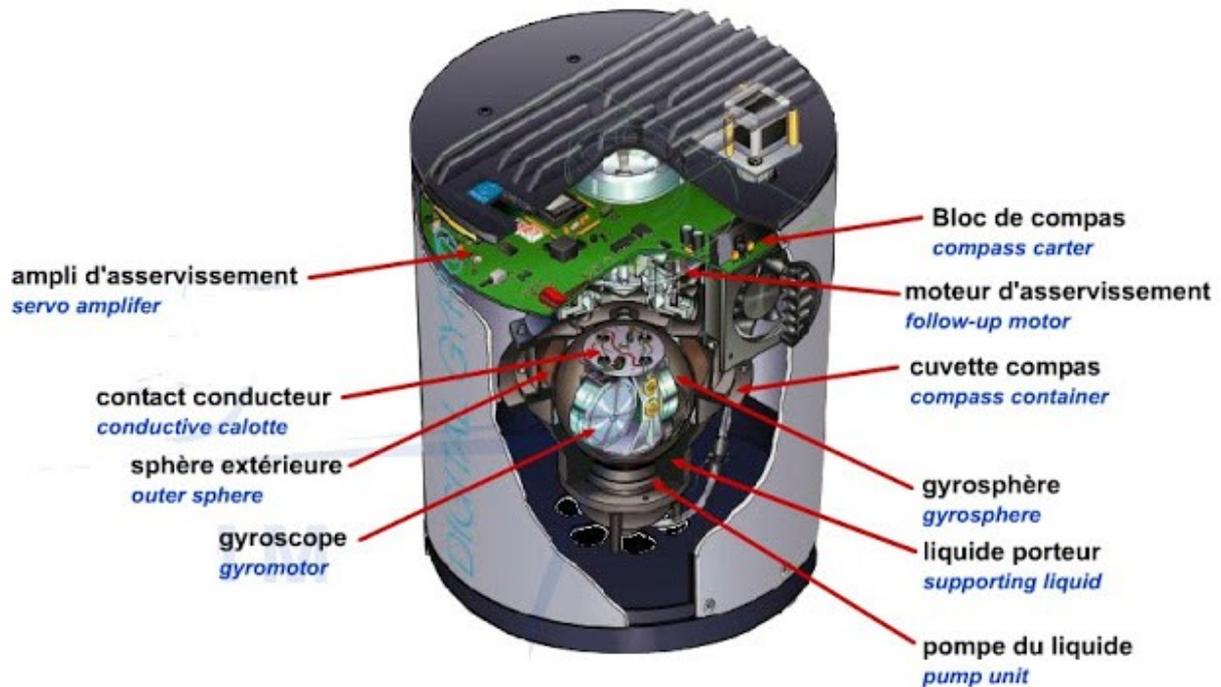


The free gyroscope has now become a gyrocompass, able to settle only on the meridian (pointing north) and level

### 3.2 Déviation du gyrocompas

$$d^{\circ} \approx \frac{-V \times \cos c_v}{15 \times \cos \phi}$$

### 3.3 Exemple d'un le gyrocompas



## 4 LES DIFFÉRENTS GYROCOMPAS

